# Ecalleの再生関数と複素力学系 (複素力学系の諸問題)



宇敷, 重広

数理解析研究所講究録
1042巻 1998年 173-175



# Écalleの再生関数と複素力学系

京都大学大学院 人間・環境学研究科
宇敷重広 (Shigehiro Ushiki)

Écalleの再生関数は[1]において導入された。Écalleの再生関数は、ある種の超関数で、Borel-Laplace変換を通じて、複素関数の漸近挙動を解析するのに強力な道具となる。Écalleの論文においては、複素力学系の解析不変量などへの応用とともに、微分方程式の解の漸近解析など、様々な方面への応用が記述されている。こうした応用のうち、微分方程式の漸近解析の方面では、[4]にも紹介されているように、超局所解析の手法と関連して、大いに研究が進んでいる。しかし、離散時間の複素力学系の方面へのÉcalleの再生関数の応用については、いまのところ、Écalle自身の画期的な研究の他には見るべきものがない。複素力学系の研究者のあいだで、この研究があまり知られていないようなので、もっとも簡単な部分に限定して、この講演で紹介を試みた。

Écalleの論文[1]は極めて読みにくく、また証明にギャップがある。Malgrangeによる解説[3]では、1次元複素力学系の放物型不動点の標準形の問題に限っているが、証明のギャップは埋められている。

複素平面$\mathbb{C}$の無限遠点の近傍で定義された$f(z) = z + 1 + h(z)$を考える。$h(z) = O(z^{-2})$は無限遠点の近傍で正則な関数とする。無限遠点は$f$の放物型不動点である。

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\xi z} h(z) dz$$

を$h(z)$のBorel変換という。ただし、$C_R$は原点を中心とする、十分大きな半径$R$の円とする。(Borel変換はLaplace変換の逆変換である。)
$\{|z| \geq M\}$において$h(z)$が正則なら、

$$|\hat{h}(\xi)| \leq e^{M|\xi|} \sup_{|z|=M} |h(z)|$$

を満たすので、$\hat{h}(\xi)$ は $\mathbb{C}_\xi$ 上 entire である。$h(z) = O(z^{-2})$ より、$\hat{h}(0) = 0$ である。さて、

$$f^*(z) = \lim_{n\to\infty}(f^{\circ n}(z) - n) = z + \sum_{n=0}^{\infty} h \circ f^{\circ n}(z)$$

は、ある $A > 0$ と $B > 0$ について、

$$\mathrm{S} = \{\Re z > A\} \cup \{|\Im z| > B\}$$

で広義一様収束し、Abel の方程式

$$f^* \circ f = f^* + 1$$

を満たすことが、古くから知られている。無限遠の近傍で正則な関数 $\varphi(z)$ にたいし、

$$\varphi \circ f(z) = \varphi(z + 1 + h(z)) = \varphi(z+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(h(z))^k \varphi^{(k)}(z+1)$$

と展開できるので、その Borel 変換は、

$$\widehat{\varphi \circ f}(\xi) = e^{-\xi}\hat{\varphi}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{h}(\xi))^{*k} * \frac{(-\xi)^k}{k!} e^{-\xi}\hat{\varphi}(\xi)$$

となる。よって、同様に計算して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{h \circ f^{\circ n}}(\xi) = \frac{1}{1-e^{-\xi}} \sum_{n_i \geq 1, r \geq 0} H_{n_r} \cdots H_{n_1} \hat{h}$$

が得られる。ただしここで、

$$H_k \varphi = (\hat{h}(\xi))^{*k} * \frac{(-\xi)^k}{k!} \frac{1}{1-e^{-\xi}} \varphi$$

である。このことから、$\widehat{f^*}(\xi)$ は、$\Omega = 2\pi i \mathbf{Z}$ において、極または対数型の特異性を持つ、$\mathbb{C} \backslash \Omega$ の普遍被覆空間において正則な関数になる。(このような関数をÉcalle は再生関数と呼んでいる。) 上の式を使って、評価することによって、$\widehat{f^*}$ は、虚軸方向以外では高々指数関数型の増大度であることが示せて、$\widehat{f^*}$ の Laplace 変換

$$f^*(z) = \int_0^{\infty e^{-\theta}} e^{-\xi z} \widehat{f^*}(\xi) d\xi$$

は領域 S で収束する。$f^*$ は Fatou 座標を与える関数であるが、これが、Écalle の再生関数 $\widehat{f^*}$ の Laplace 変換として表示された。再生関数 $\widehat{f^*}$ の特異点の留数たちが元の力学系の解析不変量を与えることなど、Écalle の理論が、複素力学系の研究に不可欠なものであることを示唆している。

## References

[1] J.Écalle, Les Fonctions Résurgentes, I, II, III. Publications Mathématiques d'Orsay, Paris, 1981-1985.

[2] B.Malgrange, Travaux de Écalle et de Martinet-Ramis sur le systèmes dynamiques, Astérisque 92-93,pp59-73, 1982.

[3] B.Malgrange, Introduction aux travaux de J.Écalle, L'enseignement Mathématique, 31, 1985, pp261-282.

[4] B.Y.Sternin & V.E.Shatalov, Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory — Introduction to Resurgent Analysis, CRC Press 1996.